# Phần 1: TÍNH SAI SỐ VÀ XỬ LÍ SỐ LIỆU

## I. Mục đích

- Rèn luyện kỹ năng tính giá trị trung bình và sai số của đại lượng vật lí được đo trực tiếp.

- Vận dụng thành thạo các phương pháp tính sai số của đại lượng đo gián tiếp.

- Từ bảng số liệu thực nghiệm, học sinh cần nắm vững phương pháp xử lí số liệu để tính giá trị trung bình và sai số của đại lượng đo gián tiếp.

- Nắm vững và thành thạo quy tắc làm tròn số và viết kết quả đo đại lượng vật lí.

## II. Cơ sở lí thuyết

### *2.1. Định nghĩa phép tính về sai số*

**Các khái niệm**

**a.** Phép đo trực tiếp: Đo một đại lượng vật lí có nghĩa là so sánh nó với một đại lượng cùng loại mà ta chọn làm đơn vị.

**b.** Phép đo gián tiếp: Trường hợp giá trị của đại lượng cần đo được tính từ giá trị của các phép đo trực tiếp khác thông qua biểu thức toán học, thì phép đo đó là phép đo gián tiếp.

**Phân loại sai số**

Khi đo một đại lượng vật lí, dù đo trực tiếp hay gián tiếp, bao giờ ta cũng mắc phải sai số. Người ta chia thành hai loại sai số như sau:

*a. Sai số hệ thống:*

Sai số hệ thống xuất hiện do sai sót của dụng cụ đo hoặc d... phương pháp lí thuyết chưa hoàn chỉnh, chưa tính đến các yếu tố ảnh hưởng đến kết quả đo. Sai số hệ thống thường làm cho kết quả đo lệch về một phía so với giá trị thực của đại lượng cần đo. Sai số hệ thống có thể loại trừ được bằng cách kiểm tra, điều chỉnh lại các dụng cụ đo, hoàn chỉnh phương pháp lí thuyết đo, hoặc đưa vào các số hiệu chỉnh.

*b. Sai số ngẫu nhiên:*

Sai số ngẫu nhiên sinh ra do nhiều nguyên nhân, ví dụ do hạn chế của giác quan người làm thí nghiệm, do sự thay đổi ngẫu nhiên không lường trước được của các yếu tố gây ảnh hưởng đến kết quả đo. Sai số ngẫu nhiên làm cho kết quả đo lệch về cả hai phía so với giá trị thực của đại lượng cần đo. Sai số ngẫu nhiên không thể loại trừ được. Trong phép đo cần phải đánh giá sai số ngẫu nhiên.

**2.2. Phương pháp xác định sai số của phép đo trực tiếp**

***a) Phương pháp chung xác định giá trị trung bình và sai số ngẫu nhiên***

Giả sử đại lượng cần đo A được đo *n* lần. Kết quả đo lần lượt là $A_1, A_2, \dots A_n$.

Đại lượng $\bar{A} = \frac{A_1+A_2+....+A_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n}$ (1)

được gọi là giá trị trung bình của đại lượng A trong *n* lần đo. Số lần đo càng lớn, giá trị trung bình $\bar{A}$ càng gần với giá trị thực A. Các đại lượng:

$$\Delta A_1 = |\bar{A} - A_1|$$
$$\Delta A_2 = |\bar{A} - A_2|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta A_n = |\bar{A} - A|_n$$

được gọi là sai số tuyệt đối trong mỗi lần đo riêng lẻ. Để đánh giá sai số của phép đo đại lượng A, người ta dùng sai số toàn phương trung bình. Theo lí thuyết xác suất, sai số toàn phương trung bình là: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta A_i)^2}{n(n-1)}}$ (2)

và kết quả đo đại lượng A được viết: $A = \bar{A} \pm \sigma$ (3)

Như vậy, giá trị thực của đại lượng A với một xác suất nhất định sẽ nằm trong khoảng từ $A - \sigma$ đến $A + \sigma$, nghĩa là:

$$\overline{A} - \sigma \leq A \leq \overline{A} + \sigma$$

Khoảng $[(\overline{A} - \sigma), (\overline{A} + \sigma)]$ gọi là khoảng tin cậy. Sai số toàn phương trung bình $\sigma$ chỉ được dùng với các phép đo đòi hỏi độ chính xác cao và số lần đo $n$ lớn. Nếu đo đại lượng A từ 5 đến 10 lần, thì ta dùng sai số tuyệt đối trung bình số học $\Delta A$ (sai số ngẫu nhiên) được định nghĩa như sau:

$$\Delta A = \frac{\sum_{i=1}^{n} |(\Delta A_i)|}{n} \quad (4)$$

Kết quả đo lúc này được viết dưới dạng: $A = \overline{A} \pm \Delta A$ (5)

Ngoài sai số tuyệt đối, người ta còn sử dụng sai số tỉ đối được định nghĩa như sau:

$$\delta = \frac{\Delta A}{\overline{A}}.100\% \quad (6)$$

Kết quả đo được viết như sau: $A = \bar{A} \pm \delta\%$ (7)

Như vậy, cách viết kết quả phép đo trực tiếp như sau:

- Tính giá trị trung bình $\overline{A}$ theo công thức (1)

- Tính các sai số $\Delta A$ theo công thức (4) hoặc (6).

- Kết quả đo được viết như (5) hoặc (7).

Ví dụ: Đo đường kính viên bi 4 lần, ta có kết quả sau:

$$d_1 = 8{,}75mm, \Delta d_1 = 0{,}00mm$$

$$d_2 = 8{,}76mm, \Delta d_2 = -0{,}01mm$$

$$d_3 = 8{,}74mm, \Delta d_3 = 0{,}01mm$$

$$d_4 = 8{,}77mm, \Delta d_4 = -0{,}02mm$$

Giá trị trung bình của đường kính viên bi là:

$$\overline{d} = \frac{8{,}75+8{,}76+8{,}74+8{,}77}{4} = 8{,}75mm$$

Sai số tuyệt đối trung ... là

$$\Delta d = \frac{0,00+0,... + 0,01+0,02}{4} = 0,01mm$$

Kết quả: $d = 8,75 \pm 0,01mm$

***b) Cách xác định sai số dụng cụ***

Mỗi dụng cụ có một độ chính xác nhất định. Nếu dùng dụng cụ này để đo một đại lượng vật lí nào đó thì đương nhiên sai số nhận được không thể vượt quá độ chính xác của dụng cụ đó. Nói cách khác, sai số của phép đo không thể nhỏ hơn sai số dụng cụ.

Tuy nhiên cũng vì một lí do nào đó, phép đo chỉ được tiến hành một lần hoặc độ nhạy của dụng cụ đo không cao, kết quả của các lần đo riêng lẻ trùng nhau. Trong trường hợp đó, ta phải dựa vào độ nhạy của dụng cụ để xác định sai số. Sai số $\Delta A$ thường được lấy bằng nửa giá trị của độ chia nhỏ nhất của dụng cụ.

Khi đo các đại lượng điện bằng các dụng cụ chỉ thị kim, sai số được xác định theo cấp chính xác của dụng cụ.

*Ví dụ:* Vôn kế có cấp chính xác là 2. Nếu dùng thang đo 200V để đo hiệu điện thế thì sai số mắc phải là $\Delta U = 2\%.200 = 4V$.

Nếu kim chỉ thị vị trí 150V thì kết quả đo sẽ là: $U = 150 \pm 4V$

Khi đo các đại lượng điện bằng các đồng hồ đo hiện số, cần phải lựa chọn thang đo thích hợp.

Nếu các con số hiển thị trên mặt đồng hồ là ổn định (con số cuối cùng bên phải không bị thay đổi) thì sai số của phép đo có thể lấy giá trị bằng tích của cấp chính xác và con số hiển thị.

*Ví dụ:* đồng hồ hiện số có ghi cấp sai số 1.0% rdg (kí hiệu quốc tế cho dụng cụ đo hiện số), giá trị điện áp hiển thị trên mặt đồng hồ là: U = 218 V thì có thể lấy sai số dụng cụ là:

$$\Delta U = 1\%.218 = 2,18V$$

Làm tròn số ta có: $U = 218,0 \pm 2,2V$

Nếu các con số cuối cùng không hiển thị ổn định (nhảy số), thì sai số của phép đo phải kể thêm sai số ngẫu nhiên trong khi đo.

*Ví dụ:* khi đọc giá trị hiển thị của điện áp bằng đồng hồ nêu trên, con số cuối cùng không ổn định (nhảy số): 215 V, 216 V, 217 V, 218 V, 219 V (số hàng đơn vị không ổn định). Trong trường hợp này giá trị trung bình U = 217 V. Sai số phép đo cần phải kể thêm sai số ngẫu nhiên trong quá trình đo $\Delta U_n = 1{,}2$ V. Do vậy:

$$U = 217{,}0 \pm 2{,}2 \pm 1{,}2 = 217{,}0 \pm 3{,}4\,V$$

***Chú ý:***

*- Nhiều loại đồng hồ hiện số có độ chính các cao, do đó sai số phép đo chỉ cần chú ý tới thành phần sai số ngẫu nhiên. Hoặc đề bài cũng thường bỏ qua sai số do đồng hồ đo gây ra.*

*- Trường hợp tổng quát, sai số của phép đo gồm hai thành phần: sai số ngẫu nhiên với cách tính như trên và sai số hệ thống (do dụng cụ đo)*

### 2.3. Phương pháp xác định sai số gián tiếp

***a) Phương pháp chung***

Giả sử đại lượng cần đo A phụ thuộc vào các đại lượng x, y, z theo hàm số $A = f(x, y, z)$. Trong đó x, y, z là các đại lượng đo trực tiếp và có giá trị

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

$$y = \overline{y} \pm \Delta y$$

$$z = \overline{z} \pm \Delta z$$

Giá trị trung bình $\overline{A}$ được xác định bằng cách thay thế các giá trị x, y, z vào hàm trên, nghĩa là $\overline{A} = f\ (\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

***b) Cách xác định cụ thể***

Theo lí thuyết về sai số, nếu hàm $A = f(x, \dots, z)$, có các biến $x, \dots, z$ độc lập và có các sai số ngẫu nhiên $\Delta x, \dots, \Delta z$, ta có thể tính được sai số $\Delta A$:

$$\Delta A = \sqrt{(\frac{\partial A}{\partial x}.\Delta x)^2 + \ldots + (\frac{\partial A}{\partial z}.\Delta z)^2},$$

Với $\frac{\partial A}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial z}$ là các đạo hàm riêng của $A$ theo các biến $x, \ldots, z$.

Tuy nhiên, nếu không đòi hỏi độ chính xác cao, sai số $\Delta A$ có th được tính gần đúng bằng phương pháp vi phân theo một trong ha cách sau:

***Cách 1***

Cách này sử dụng thuận tiện khi hàm $f(x, y, z)$ là một tổng ha một hiệu (không thể lấy logarit dễ dàng). Cách này gồm các bước sau:

a. Tính vi phân toàn phần của hàm $A = f(x, y, z)$, sau đó gộp cá số hạng có chứa vi phân của cùng một biến số.

b. Lấy giá trị tuyệt đối của các biểu thức đứng trước dấu vi phâ $d$ và thay dấu vi phân $d$ bằng dấu $\Delta$. Ta thu được $\Delta A$.

c. Tính sai số tỉ đối (nếu cần).

*Ví dụ:* Một vật ném xiên góc $\alpha$ có độ cao $h = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$

Trong đó:

$$v_0 = 39{,}2 \pm 0{,}2 m/s$$

$$\alpha = 30 \pm 1^0$$

$$t = 2{,}0 \pm 0{,}2 s$$

$$g = 9{,}8 m/s^2$$

Ta có:

$$\overline{h} = 39{,}2.\sin 30^0.2 - 9{,}8.\frac{2^2}{2} = 19{,}6m$$

$$dh = v_0 \sin\alpha\,.dt + v_0 \cos\alpha\,.d\alpha + \sin\alpha\,.t.dv_0 - g.t.dt$$

$$= (v_0.\sin\alpha - gt).dt + v_0.t\cos\alpha\,.d\alpha + \sin\alpha\,.t.dv_0$$

$$\Delta h = |v_0.\sin - gt|.\Delta t + |v_0.t.\cos.|.\Delta\alpha + |\sin\alpha\,.t|.\Delta v_0$$

$$= |39{,}2.\sin 30^0 - 9.8.2|.0{,}2 + |39{,}2.2.\cos 30^0|.\frac{2\pi}{360} +$$

$$|\sin 30^0.2|.0{,}2 = 1{,}38m$$

Sử dụng quy ước viết kết quả ở IV ta có: $h = 19{,}6 \pm 1{,}4m$

*Cách 2*

Sử dụng thuận tiện khi hàm $f(x, y, z)$ là dạng tích, thương, lũy thừa.... Cách này cho phép tính sai số tỉ đối, gồm các bước:

a. Lấy logarit cơ số e của hàm $A = f(x, y, z)$

b. Tính vi phân toàn phần hàm $\ln A = \ln f(x, y, z)$, sau đó gộp các số hạng chứa vi phân của cùng một biến số.

c. Lấy giá trị tuyệt đối của biểu thức đứng trước dấu vi phân *d* và chuyển dấu *d* thành $\Delta$ ta có $\delta = \frac{\Delta A}{A}$

d. Tính $\Delta A = A.\,\delta$

*Ví dụ:* Gia tốc trọng trường được xác định bằng biểu thức:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Ở đây: $l = 500 \pm 1mm$

$T = 1{,}45 \pm 0{,}05s$

$\overline{g} = 9{,}78 \pm 0{,}20m/s^2$

Khi đó:

$$\ln g = \ln(4\pi^2 l) - \ln(T^2)$$

$$\frac{dg}{\bar{g}} = \frac{d(4\pi^2 l)}{4\pi^2 l} - \frac{d(T^2)}{T^2} \Leftrightarrow \frac{dg}{\bar{g}} = \frac{d(4\pi^2)}{4\pi^2 l} + \frac{4\pi^2 dl}{4\pi^2 l} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta g}{\bar{g}} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{\bar{T}} \Rightarrow \Delta g = \bar{g}\left(\frac{\Delta l}{\bar{l}} + \frac{2\Delta T}{\bar{T}}\right)$$

### 2.4. Cách viết kết quả

***a) Các chữ số có nghĩa***

Tất cả các chữ số từ trái sang phải, kể từ số khác không đầu tiên đều là chữ số có nghĩa.

Ví dụ: 0,014030 có 5 chữ số có nghĩa.

***b) Quy tắc làm tròn số***

- Nếu chữ số ở hàng bỏ đi có giá trị < 5 thì chữ số bên trái nó vẫn giữ nguyên.

***Ví dụ:*** $0{,}0731 \approx 0{,}07$

- Nếu chữ số ở hàng bỏ đi có giá trị $\geq 5$ thì chữ số bên trái nó tăng thêm một đơn vị.

***Ví dụ:***$2{,}83745 \approx 2{,}84$

***c) Cách viết kết quả***

- Sai số tuyệt đối $\Delta A$ và sai số trung bình đều được làm tròn theo quy tắc trên.

- Khi viết kết quả, giá trị trung bình được làm tròn đến chữ số cùng hàng với chữ số có nghĩa của sai số tuyệt đối.

***Ví dụ:***

Không thể viết $m = 2{,}83745 \pm 0{,}0731g$ mà phải viết $m = 2{,}84 \pm 0{,}07g$

hoặc là ta tính $\delta = \left(\frac{0{,}07}{2{,}84}\right).100\% = 2{,}464 = 2{,}464\%$

Ta có thể viết: $m = (2{,}84 \pm 2{,}5.2{,}84\%)\ g.$

Nếu sai số lấy đến 1 chữ số có nghĩa thì : $m = (2{,}84 \pm 0{,}07)\ g$

Chú ý rằng khi viết kết quả cuối cùng, sai số toàn phần sẽ bằng tổng sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống: $\Delta_{TP} = \Delta_{NN} + \Delta_{HT}$

***Ví dụ:***

Khi dùng thước kẹp để đo đường kính một sợi dây nhỏ, giả sử ta đo 5 lần, sai số ngẫu nhiên tính được là $\Delta d = 0{,}05mm$. Thước kẹp có độ chính xác $\delta = 0{,}02mm$ thì sai số toàn phần sẽ là $\Delta_{TP} = 0{,}05 + 0{,}02 = 0{,}07mm$.

Nếu sai số ngẫu nhiên nhỏ hơn sai số hệ thống thì ta bỏ qua sai số ngẫu nhiên đó (vì không thể đo được kết quả chính xác hơn cả cấp chính xác của dụng cụ đo). Trong trường hợp phép đo chỉ thực hiện

một lần thì sai số toàn phần được lấy chính là sai số hệ thống (do dụng cụ đo).

### 2.5. Xử lí số liệu và biểu diễn kết quả bằng đồ thị

Trong nhiều trường hợp kết quả thí nghiệm được biểu diễn bằng đồ thị là rất thuận lợi, vì đồ thị có thể cho thấy sự phụ thuộc của một đại lượng y vào đại lượng x nào đó. Phương pháp đồ thị thuận tiện để lấy trung bình các kết quả đo.

Giả sử bằng các phép đo trực tiếp, ta xác định được các cặp giá trị của x và y như sau:

$$\begin{cases}\bar{x}_1 \pm \Delta x_1 \\ \bar{y}_1 \pm \Delta y_1\end{cases}$$

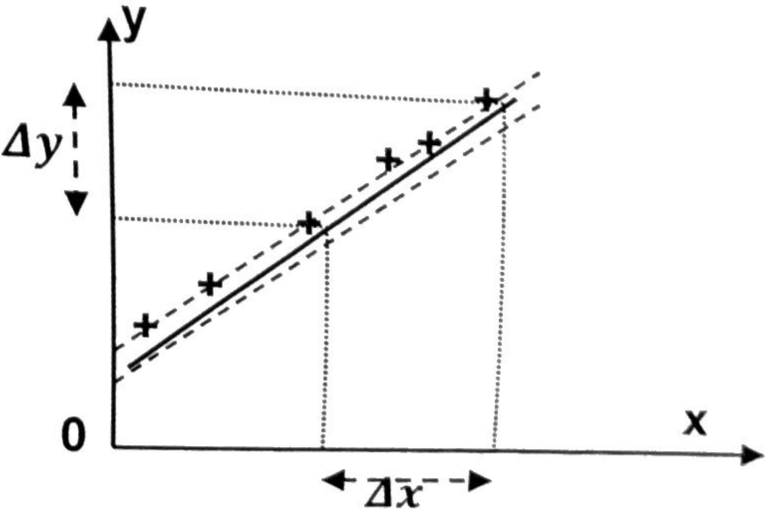
$$\begin{cases}\bar{x}_2 \pm \Delta x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{y}_2 \pm \Delta y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} \begin{cases}\bar{x}_n \pm \Delta x_n \\ \bar{y}_n \pm \Delta y_n\end{cases}$$

Muốn biểu diễn hàm $y = f(x)$ bằng đồ thị, ta làm như sau:

a. Trên giấy kẻ ô, ta dựng hệ tọa độ decac vuông góc. Trên trục hoành đặt các giá trị x, trên trục tung đặt các giá trị y tương ứng. Chọn tỉ lệ xích hợp lí để đồ thị choán đủ trang giấy.

b. Dựng các dấu chữ thập hoặc các hình chữ nhật có tâm là các điểm $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2) \ldots\ldots A_n(x_n, y_n)$ và có các cạnh tương ứng là $(2\Delta x_1, 2\Delta y_1), \ldots\ldots (2\Delta x_n, 2\Delta y_n)$. Dựng đường bao sai số chứa các hình chữ nhật hoặc các dấu chữ thập.

c. Đường biểu diễn $y = f(x)$ là một đường cong trơn trong đường bao sai số được vẽ sao cho nó đi qua hầu hết các hình chữ nhật và các điểm $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ nằm trên hoặc phân bố về hai phía của đường cong (hình 1.1).



Hình 1.1. Dựng đồ thị

d. Nếu có điểm nào tách xa khỏi đường cong thì phải kiểm tra lại giá trị đó bằng thực nghiệm. Nếu vẫn nhận được giá trị cũ thì phải đo thêm các điểm lân cận để phát hiện ra điểm kì dị.

e. Dự đoán phương trình đường cong có thể là tuân theo phương trình nào đó:

- Phương trình đường thẳng $y = ax + b$
- Phương trình đường bậc 2
- Phương trình của một đa thức
- Dạng $y = e^{ax}$, $y = a^{bx}$
- Dạng $y = a/x^n$
- Dạng $y = \ln x$.

Việc thiết lập phương trình đường cong được thực hiện bằng cách xác định các hệ số a, b, …n. Các hệ số này sẽ được tính khi làm khớp các phương trình này với đường cong thực nghiệm

Các phương trình này có thể chuyển thành phương trình đường thẳng bằng cách đổi biến thích hợp (tuyến tính hóa)

*Chú ý: Ngoài hệ trục có tỉ lệ xích chia đều, người ta còn dùng hệ trục có một trục chia đều, một trục khác có thang chia theo logarit để biểu diễn các hàm mũ, hàm logarit ($y = \ln x$; $y = a^x$ ...).*

**2.6. Ước lượng các hệ số của mô hình hồi quy tuyến tính theo phương pháp bình phương tối thiểu (nâng cao).**

Phân tích hồi quy tuyến tính là phương pháp phân tích quan hệ giữa biến phụ thuộc Y với biến đầu vào độc lập X.

Ở đa số các bài tập thực nghiệm cấp THCS và THPT, ta chỉ cần xử lí số liệu các hàm $y = f(x)$ là hàm tuyến tính (bậc 1) hoặc có thể biến đổi thành hàm tuyến tính có dạng:

$$y = A + Bx$$

Ở nhiều bài tập, việc xác định các hệ số *A* và *B* là vô cùng quan trọng. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, sử dụng các dữ liệu đo được $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ta có thể ước lượng các hệ số *A* và *B* theo các công thức:

$$B = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Để nghiên cứu độ tương quan của *X* và *Y*, ta sử dụng hệ số tương quan Pearson *r*:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Hệ số tương quan *r* có giá trị trong khoảng từ -1 đến 1. Giá trị của $|r|$ hay $r^2$ càng gần 1 thì độ tương quan của *X* và *Y* càng lớn.

Nếu các giá trị của *x* và *y* có sai số chuẩn (SE) là $\sigma x$ và $\sigma y$ tính theo công thức ở mục **2.2**, ta có thể tính được sai số chuẩn (SE) $\sigma A$ và $\sigma B$ của hai hệ số *A* và *B*:

$$\sigma B^2 = \frac{B^2}{n-2}\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)$$

$$\sigma A^2 = \sigma B^2 . \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$